UNIVERSIDAD EIA
Ser, Saber y Servir
Con Acreditación Institucional

EXAMEN FINAL

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

VIERNES 31 DE MAYO 2019

Nombre: ____

1. (20 %) Una compañía produce piezas maquinadas para motor que se supone tienen una varianza en diámetro no mayor a 0.0002 (diámetro medido en pulgadas y distribuido normalmente). Una muestra aleatoria de diez piezas dio una varianza muestral de 0.0003, pruebe con el nivel de significancia de 5 % que el supuesto está equivocado.

2. (15 %) Considere el lanzamiento de un dado. Suponga que se trata de un dado legal, lo cual equivale a probar la hipótesis de que la distribución de resultados es la distribución uniforme discreta:

$$f(x) = \frac{1}{6} \qquad x = 1, 2, \ldots, 6$$

Suponga que el dado se lanza 120 veces y que se registra cada resultado como se muestra en la tabla:

Número en el dado	1	2	3	4	5	6
Frecuencia observada	20	22	17	18	19	24

Realice la prueba con un nivel de significancia de 5 %.

3. Sea I_i la corriente de entrada a un transistor y sea I_0 la corriente de salida. Entonces la ganancia de corriente es proporcionalidad a $Ln\left(\frac{I_0}{I_i}\right)$. Suponga que la constante de proporcional es 1 (lo que significa seleccionar una unidad particular de medida), así que la ganancia de unidad es $Y = Ln\left(\frac{I_0}{I_i}\right)$. Suponga que Y está normalmente distribuida con $\mu = 1$ y $\sigma = 0.5$:

   a) (10 %) ¿Qué tipo de distribución y con cuáles parámetros tiene la razón $\frac{I_0}{I_i}$?
   b) (10 %) ¿Cuál es la probabilidad de que la corriente de salida sea más del doble de la corriente de entrada?
   c) (15 %) ¿Cuáles son μ y $\tilde{\mu}$ de la razón entre la corriente de salida y la corriente de entrada?

4. (15 %) La longitud de las barras de metal producidas por un proceso industrial sigue una distribución normal que tiene una desviación estándar de 1.8 milímetros. Basandose en una muestra aleatoria de nueve observaciones extraidas de esta población, se ha hallado el intervalo de confianza al 99 %

$$194.65 < \mu < 197.75$$

de la media poblacional de la longitud. Supongamos que un director de producción cree que el intervalo es demaciado amplio para que tenga utilidad práctica y pide un intervalo de confianza de 99 % cuya amplitud a cada lado de la media muestral no sea de más de 0.50 milímetros. ¿De qué tamaño debe ser la muestra para lograr este intervalo?

5. (15 %) Suponga que $X_1, X_2, \ldots X_n$ denota una muestra aleatoria de tamaño n de una distribución de Poisson con media λ. Considere

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{X_1 + X_2}{2}, \qquad \hat{\lambda}_2 = \bar{X}$$

Deduzca la eficiencia relativa de $\hat{\lambda}_1$ con respecto a $\hat{\lambda}_2$, ¿cuál estimador tiene menor varianza?

FÓRMULAS

$$Si\ Y \sim P(\lambda) \Rightarrow f(y) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} \quad y = 0, 1, \ldots\ E(Y) = \lambda \quad Var(Y) = \lambda$$

$$Si\ Y \sim \chi^2(\nu) \Rightarrow E(Y) = \nu \qquad Var(Y) = 2\nu, \qquad M_Y(t) = (1-2t)^{-\nu/2}$$

$$Si\ Y \sim geometrica(p) \Rightarrow f(y) = (1-p)^{y-1}p, \qquad y = 1, 2, \ldots, \quad E(Y) = \frac{1}{p}, \quad Var(Y) = \frac{1-p}{p^2}$$

$$Si\ X \sim binomial(n, p) \Rightarrow f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad E(X) = np \qquad \sigma^2 = np(1-p)$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0, 1) \qquad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

$$Si\ Y \sim logaritmicaNorma(\mu, \sigma) \Rightarrow E(Y) = e^{\mu + \sigma^2/2} \qquad Var(Y) = e^{2\mu + \sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \mu_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t(\nu = n + m - 2) \Rightarrow \quad S_p^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n + m - 2}$$

$$L = \prod_{i=1}^n f(x_i) \qquad \chi_0^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} \sim \chi^2(\nu = k - p - 1)$$

- $F = \dfrac{S_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2 S_2^2} \sim F_{(n_1-1,\ n_2-1)}$
- $\chi_0^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(\nu = n-1)$

$z_{0.005} \approx 2.5758$ $\quad z_{0.05} \approx 1.6448$ $\quad t_{(0.005,15)} \approx 2.9467$

$F_{(0.005,7,8)} \approx 7.69418$ $\quad F_{(0.995,7,8)} \approx 0.1159$

$\chi^2_{(0.0249,)} \approx 16.0128$ $\quad \chi^2_{(0.05,4)} \approx 9.4877$ $\quad \chi^2_{(0.95,4)} \approx 0.7107$

$\chi^2_{(0.05,9)} \approx 16.8189$ $\quad \chi^2_{(0.0030,9)} \approx 16.008$

$z_{0.0178} \approx 2.10$ $\quad z_{0.0015} \approx 2.98$ $\quad z_{0.1494} \approx 1.0540$ $\quad \chi^2_{0.05,5} \approx 11.0704$